e-ISSN: 2549-5070
p-ISSN: 2549-8231

Journal of Medives Volume 2, No. 1, 2018, pp. 51-56
http://e-journal.ikip-veteran.ac.id/index.php/matematika/article/view/527

PENGEMBANGAN TEOREMA NAPOLEON PADA SEGIENAM

Novita Yuliardani*, Mashadi, Sri Gemawati
Program Studi Magister Matematika Universitas Riau
*novitayuliardani@gmail.com

Diterima: Nopember 2017. Disetujui: Desember 2017. Dipublikasikan: Januari 2018

ABSTRAK

Pada umumnya teorema Napoleon diberlakukan pada segitiga. Dalam tulisan ini dibahas teorema Napoleon pada segienam, yaitu segienam yang memiliki tiga pasang sisi sejajar dan sama panjang dengan kasus segienam beraturan yang dibangun mengarah ke luar. Pembuktian pada teorema Napoleon ini dengan menggunakan konsep kesebangunan dan konsep trigonometri.

Kata kunci: Teorema Napoleon, konsep kekongruenan, trigonometri.

ABSTRACT

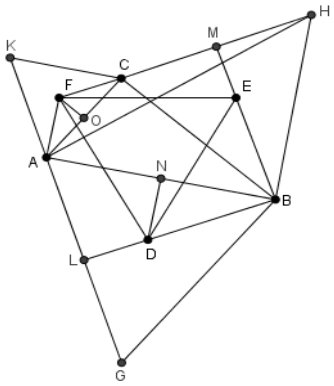
Napoleon's Theorem generally applies in triangle. This paper applied Napoleon's Theorem in hexagons that have three pairs of parallel sides in same length and regular hexagons that are built outward. Provided proofs use the congruence and trigonometric concepts.

***Keywords**: Napoleon's Theorem, congruency concept, trigonometry.*

How to Cite: Yuliardani, N., Mashadi., & Gemawati, S. (2018). Pengembangan Teorema Napoleon pada Segienam. *Journal of Medives*, *2* (1), 51-56.

PENDAHULUAN

Pada bidang geometri salah satu teorema yang membahas tentang segitiga adalah teorema Napoleon. Teorema Napoleon ditemukan oleh Napoleon Bonaparte (1769-1821) dalam (Georgiev & Mushkarov, 2017). Setelah empat tahun meninggalnya Napoleon, teorema ini dipublikasikan pertama kali oleh W. Rutherford di *New Mathematical Question* (Grumbaum, 2012).



Gambar 1. Teorema Napoleon pada segitiga

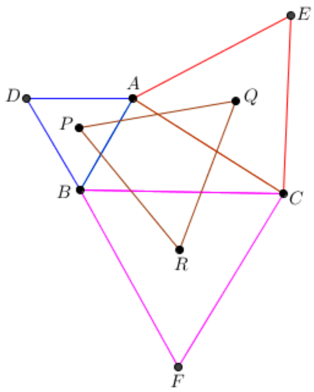
Teorema Napoleon merupakan teorema yang berkaitan dengan titik, garis, dan segitiga pada bidang datar. Teorema Napoleon menyatakan bahwa jika segitiga sama sisi dibangun pada setiap sisi segitiga sebarang, baik dibangun mengarah ke dalam ataupun ke luar maka dari ketiga titik pusat segitiga sama sisi tersebut terbentuklah sebuah segitiga sama sisi yang baru (Wetzel, 1992). Kemudian menurut (Georgiev & Mushkarov, 2017) segitiga sama sisi yang baru tersebut disebut segitiga Napoleon (Gambar 1).

Teorema Napoleon pada segitiga terdiri dari dua kasus. Kasus pertama menjelaskan segitiga sama sisi yang terbentuk dari tiga titik pusat segitiga sama sisi yang dibangun pada setiap sisi segitiga sebarang mengarah keluar. Kasus kedua menjelaskan segitiga sama sisi yang terbentuk dari tiga titik pusat segitiga sama sisi yang dibangun pada setiap sisi segitiga sebarang mengarah ke dalam.

Adapun teorema Napoleon pada segitiga untuk kasus mengarah ke luar berbunyi sebagai berikut.

Teorema 1

(Georgiev & Mushkarov, 2017) Diketahui ΔABC adalah segitiga sebarang. Pada setiap sisi ΔABC dibangun segitiga sama sisi $\Delta ABD, \Delta ACE,$ dan ΔBCF mengarah ke luar. Misalkan $P, Q,$ dan R adalah masing-masing titik pusat dari segitiga sama sisi yang dibangun tersebut. Jika ketiga titik pusat tersebut dihubungkan maka terbentuk segitiga sama sisi ΔPQR (Gambar 2).



Gambar 2. Segitiga Sama Sisi yang Dibangun Mengarah ke Luar

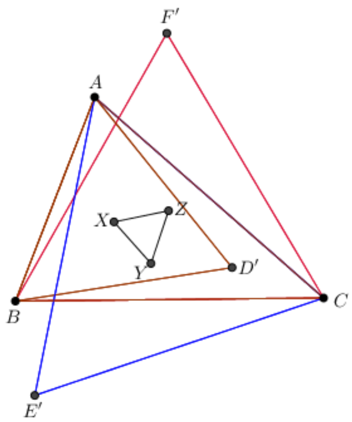
Sedangkan teorema Napoleon pada segitiga untuk kasus mengarah ke dalam berbunyi sebagai berikut.

Teorema 2

(Bredehoft, 2014) Diketahui ΔABC adalah segitiga sebarang. Pada setiap sisi ΔABC dibangun segitiga sama sisi

$\Delta ABD'$, $\Delta ACE'$, dan $\Delta BCF'$ mengarah ke dalam. Misalkan X, Y, dan Z adalah masing-masing titik pusat dari segitiga sama sisi yang dibangun tersebut. Jika ketiga titik pusat tersebut dihubungkan maka terbentuk segitiga sama sisi ΔXYZ (Gambar 3).

Beberapa bukti dari Teorema Napoleon tersebut telah ditemukan oleh beberapa matematikawan seperti (Abed, 2009) menggunakan pendekatan trigonometri dengan aturan cosinus dan aturan sinus serta (Jariah, 2017) dengan pendekatan luas segitiga. Selanjutnya (Lafleur, 2017) menggunakan konsep kekongruenan. Dari penjelasan singkat mengenai teorema Napoleon tersebut, maka pada tulisan ini penulis membahas tentang pengembangan teorema Napoleon pada segienam. Segienam yang dibahas yakni segienam yang memiliki tiga pasang sisi sejajar dan sama panjang.



Gambar 3. Segitiga Sama Sisi yang Dibangun Mengarah Kedalam

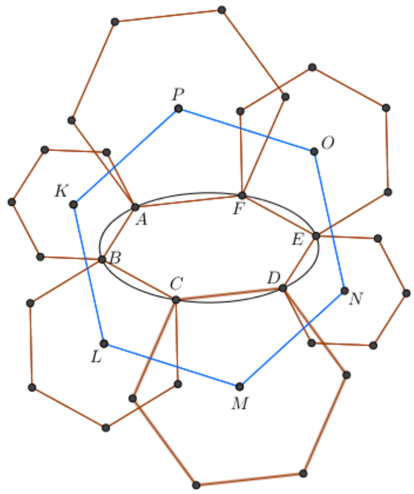
Teorema Napoleon pada segienam dibuktikan dengan menggunakan konsep kekongruenan dan trigonometri. Ide pembuktian dengan menggunakan konsep kekongruenan dan trigonometri dibahas dalam (Mashadi & Gemawati, 2017; Mashadi, 2015[a]; Mashadi, 2015[b]; Mashadi, 2016; Valentika, et al., 2016).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tulisan ini membahas pengembangan teorema Napoleon pada segienam yang memiliki tiga pasang sisi yang sejajar dan sama panjang yang kemudian dibangun segienam beraturan pada setiap sisinya yang mengarah ke luar. Pengembangan teorema Napoleon pada segienam mengarah ke luar penulis nyatakan dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 3

Diketahui segienam $ABCDEF$ adalah segienam yang memiliki tiga pasang sisi yang sejajar dan sama panjang. Pada setiap sisi segienam dibangun segienam beraturan mengarah ke luar. Misalkan $K, L, M, N, O,$ dan P adalah masing-masing titik potong diagonal segienam yang dibangun mengarah ke luar. Jika keenam titik potong diagonal tersebut dihubungkan maka membentuk segienam $KLMNOP$.

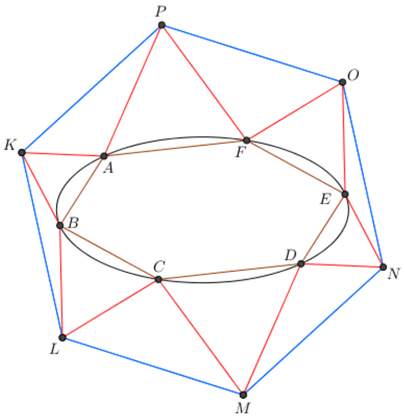


Gambar 4. Teorema Napoleon pada Segienam yang Mengarah ke Luar

Bukti 1 (Konsep Kekongruenan)

Akan ditunjukkan $KLMNOP$ adalah segienam beraturan dengan membuktikan $KL = LM = MN = NO = OP = PK$, dan $\angle K = \angle L = \angle M = \angle N = \angle O = \angle P = 120°$. Akan dibuktikan dengan konsep kekongruenan (Gambar 4).

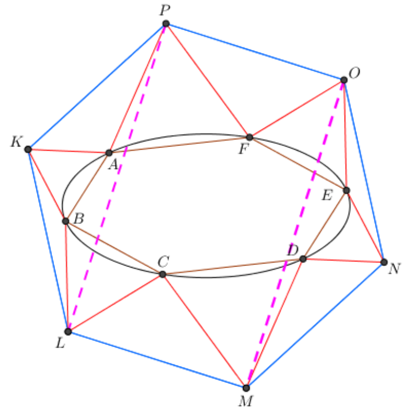
Setiap titik potong diagonal pada segienam beraturan dihubungkan ke titik-titik pada segienam $ABCDEF$ sehingga membentuk ΔAKB, ΔBLC, ΔCMD, ΔDNE, ΔEOF, dan ΔFPA (Gambar 5).



Gambar 5. Titik Potong Diagonal Segienam Beraturan Dihubungkan ke Titik Segienam $ABCDEF$

Pada segienam $ABCDEF$ yang memiliki 3 pasang sisi sejajar dan sama panjang dibangun segitiga sama sisi pada setiap sisinya. Dengan mudah dapat ditunjukkan $\Delta AKB \cong \Delta DNE$, $\Delta BLC \cong \Delta EOF$, dan $\Delta CMD \cong \Delta FPA$ yang mengakibatkan $\Delta KBL \cong \Delta NEO$, $\Delta LCM \cong \Delta OFP$ dan $\Delta MDN \cong \Delta PAK$ sehingga mengakibatkan $KL = NO$, $LM = OP$, dan $MN = PK$.

Kemudian tarik garis LP dan MO yang tegak lurus ke PO sehingga membentuk persegi panjang $LMOP$ (Gambar 6).

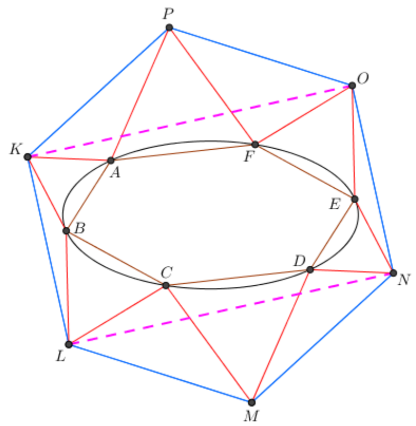


Gambar 6. Garis LP dan MO yang Tegak Lurus ke PO

Perhatikan ΔKLP dan ΔNMO, dengan mudah dapat ditunjukkan $\Delta KLP \cong \Delta NMO$ yang mengakibatkan $KL = NM$ dan $KP = NO$, sehingga diperoleh

$$KL = NM = KP = NO. \qquad (1)$$

Selanjutnya tarik garis KO dan LN yang tegak lurus ke NO sehingga membentuk persegi panjang $KLNO$ (Gambar 7).



Gambar 7. Garis KO dan LN yang Tegak Lurus ke NO

Perhatikan ΔPKO dan ΔMLN, dengan mudah dapat ditunjukkan $\Delta PKO \cong \Delta MLN$ yang mengakibatkan

$PK = ML$ dan $PO = MN$, sehingga diperoleh

$$PK = ML = PO = MN. \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$KL = LM = MN = NO = OP = PK$.(3)

Selanjutnya untuk membuktikan $\angle K = \angle L = \angle M = \angle N = \angle O = \angle P = 120°$.

Besar $\angle PKL$ diperoleh dari

$$\angle PKL = \angle PKA + \angle AKB + \angle BKL. \quad (4)$$

Besar $\angle MNO$ diperoleh dari

$$\angle MNO = \angle MND + \angle DNE + \angle ENO. (5)$$

Karena segitiga $\Delta PKA \cong \Delta MDN$, ΔAKB dan ΔDNE sama sisi dan $\Delta KBL \cong \Delta NEO$ maka diperoleh

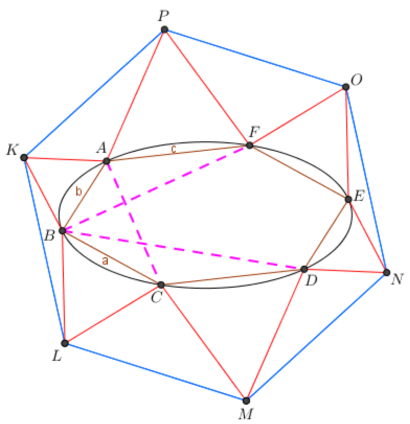
$$\angle PKL = \angle MNO. \quad (6)$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh juga

$$\angle KLM = \angle NOP \quad (7)$$

$$\angle LMN = \angle OPK \quad (8)$$

Dengan cara eliminasi dan subtitusi dari persamaan (6), (7) dan (8) maka diperoleh $\angle K = \angle L = \angle M = \angle N = \angle O = \angle P = 120°$.



Gambar 8. Pembuktian Teorema Napoleon pada Segienam dengan Konsep Trigonometri

Bukti 2 (Konsep Trigonometri)

Pada segienam $ABCDEF$ yang memiliki tiga pasang sisi sejajar dan sama panjang, misalkan sisi $BC = EF = a$, $AB = ED = b$, dan $AF = CD = c$. Akan dibuktikan $KLMNOP$ adalah segienam beraturan dengan cara menunjukan $KL = KP = LM$ dengan menggunakan aturan cosinus dan sinus. Perhatikan bahwa garis CL, BL, BK, AK, AP, dan FP adalah garis yang berpotongan dari segienam luar yang membentuk segitiga sama sisi yaitu ΔCLB, ΔBKA, dan ΔAPF (Gambar 8).

Diketahui bahwa $\angle FAB + \angle ABC + \angle BCD = 360°$. Selanjutnya dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh

$$KP^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\angle FAB - \sqrt{3}) \quad (9)$$

$$KL^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\angle ABC - \sqrt{3}) \quad (10)$$

$$LM^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\angle BCD - \sqrt{3}) \quad (11)$$

Selanjutnya dengan proses eliminasi persamaan (9), (10), dan (11) diperoleh bahwa

$$KP = KL = LM. \quad (12)$$

PENUTUP

Teorema Napoleon pada segienam yang dibahas dalam tulisan ini adalah segienam yang memiliki tiga pasang sisi sejajar dan sama panjang dengan segienam beraturan dibangun pada setiap sisi segienam yang mengarah ke luar maka keenam titik potong diagonal segienam tersebut membentuk segienam beraturan yang disebut segienam Napoleon luar. Teorema Napoleon pada segienam ini dapat diterapkan ke pembelajaran siswa SMP dan SMA karena pembuktian menggunakan cara yang sederhana yaitu materi kekong-ruenan dan trigonometri.

DAFTAR PUSTAKA

Abed, J. A. (2009). A proof of Napoleon's theorem. *The General Science Journal*. 1-4.

Bredehoft, P. (2014). *Special Cases of Napoleon Triangle*. Disertasi Master of Science: University of Central Missouri.

Georgiev, V., & Mushkarov, O. (2014). *Around Napoleon's theorem. (*http://www.dynamat.v3d.sk/uploadpdf/2012'0221528150.pdf) di akses pada 12 Januari 2017.

Grunbaum, B. (2012). Is Napoleon's theorem really Napoleon's theorem?. *The American Mathematical Monthly*. 119, 495-501.

Jariah, N. A. (2014). *Pembuktian teorema Napoleon dengan pendekatan trigonometri*. (http://www.academia.edu/12025134/ Isi NOVIKA ANDRIANI J 06121008018) di akses pada tanggal 10 Januari 2017.

Lafleur, P. (2013). *Napoleons theorem*. (www.Scimath.unl.edu/MIM/files/MATEexamFiles) di akses pada tanggal 4 Januari 2017.

Mashadi, C. V., & Gemawati, S. (2017). Development of Napoleon's Theorem on the Rectanglesin Case of Inside Direction. *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics*, *3*(2), 54-57.

Mashadi. (2015)[a]. *Geometri Edisi Kedua*. UR Press. Pekanbaru.

Mashadi. (2015)[b]. *Geometri Lanjut*. UR Press. Pekanbaru.

Mashadi. (2016). *Pengajaran Matematika*. UR Press. Pekanbaru.

Wetzel, J. E. (1992). Converses of Napoleon's theorem. *The American Mathematical Monthly*. 99, 339-351.